

Komplementarität und Logik

III. Mehrfache Quantelung

Von C. F. v. WEIZSÄCKER, E. SCHEIBE und G. SÜSSMANN

Aus dem Philosophischen Seminar der Universität Hamburg

(Z. Naturforsch. 13 a, 705–721 [1958]; eingegangen am 30. Mai 1958)

Die Quantenfeldtheorie freier Teilchen ergibt sich durch dreimalige Quantelung einer einfachen Alternative. 1. Mehrfache Quantelung wird als iterierte Anwendung der „Quantenlogik“ aufgefaßt. 2. a) Der eine gequantelte einfache Alternative kennzeichnende Zweierspinor u_A definiert einen Null-Vierer-Vektor k^μ ; dieser wird als Impulsvektor eines masselosen Teilchens gedeutet. b) Der zweite Quantelungsschritt definiert eine Impulsraumwellenfunktion $\varphi(k^\mu)$; aus $k^\mu k_\mu = 0$ folgt die Wellengleichung $k^\mu k_\mu \varphi = 0$ bzw. $\square \psi(x_\nu) = 0$. Die Feldquantelung erscheint nun als dritter Quantelungsschritt. 3. Faßt man k^μ als Impuls- und Spinvektor eines masselosen Fermions auf, so folgt für dieses die zweikomponentige WEYLSche Wellengleichung $k_\mu \sigma^\mu \varphi = 0$. 4. Erweiterung der Quantelungsvorschrift durch Charakterisierung jeder Aussage erster Stufe durch zwei komplexe Zahlen (Verdoppelung des Zustandsraumes) führt zu einer der neuen HEISENBERG–PAULISchen Gleichung formal nahe verwandten Gleichung sowie zur kräftefreien DIRAC-Gleichung mit endlicher Ruhemasse. 5. Verdoppelung des Zustandsraumes der zweiten Stufe liefert Antimaterie. 6. Kopplung zweier einfacher Alternativen liefert die MAXWELL-Gleichungen. 7. Die $(n+1)$ -te Quantelungsstufe motiviert die statistische Deutung der ψ -Funktion der n -ten Stufe. 8. Einordnung der in II betrachteten einfachen Alternativen. 9. a) Frage nach einer konsequenten Quantelungsvorschrift. Quantelung in der zweiten Stufe mit der V. R. $[u_A u_B^*] = \delta_{AB}$ liefert einen kleinsten Impuls und gekrümmten Ortsraum. b) Mögliche Beziehungen zur Theorie der Wechselwirkung.

1. Einleitung

In zwei vorausgegangenen Arbeiten¹ ist eine Deutung der Quantenmechanik vorgetragen worden, die wir als „logische Deutung“ bezeichnen wollen. In der ersten dieser Arbeiten wurde (I, 8) behauptet, aus der logischen Deutung folge eine inhaltliche Erklärung des Sinns der „mehrfachen Quantelung“. Diese Frage wird in der vorliegenden Arbeit mathematisch im einzelnen untersucht. Es ergeben sich Formeln, die man physikalisch wohl als eine Deduktion der Quantenfeldtheorie von Teilchen ohne Wechselwirkung aus einer sehr kleinen Anzahl abstrakter Voraussetzungen auffassen darf.

Wir knüpfen an die in (II, 1) gegebene eingeschränkte Formulierung der logischen Deutung an. Eine n -fache Alternative sei eine Frage, die genau n einander ausschließende Antworten zuläßt, oder sie sei die Gesamtheit der n Aussagen a_k ($k = 1, \dots, n$), die als Antworten möglich sind. Nach der klassischen Logik können dann nur n Fälle vorliegen: Genau eine der Aussagen a_k muß wahr sein. Nach der Quantentheorie sind alle Fälle möglich, die durch einen Vektor in dem n -dimensionalen komplexen Vektorraum dargestellt werden können, der dadurch entsteht, daß jeder Aussage a_k eine komplexe Zahl

ψ_k als „Wahrheitswert“ zugeordnet wird. Als „Logik“ wurde diese Theorie bezeichnet wegen zweier Eigenschaften: der Einführung statistischer Wahrheitswerte und der Allgemeingültigkeit. Die statistische Deutung werden wir erst in Abschnitt 7 der vorliegenden Arbeit besprechen. Vorerst versuchen wir möglichst viel aus der vermuteten Allgemeingültigkeit der Theorie zu folgern.

Wie in II erläutert, ist die Quantentheorie der n -fachen Alternative insofern allgemeingültig, als sie keinen Bezug nimmt auf den speziellen physikalischen Sinn der Aussagen a_k . Da uns kein physikalisch beschreibbares Objekt bekannt ist, von dem wir positiv wüßten, daß es der Quantentheorie nicht genügt, darf man die Arbeitshypothese machen, die Theorie, von der wir reden, sei so allgemeingültig wie die Physik. Trotzdem wird man mit Grund zögern, deshalb schon die Formulierung zu wagen, sie sei (hypothetisch) so allgemeingültig wie die Logik. Sie bezieht sich ja nur auf Aussagen, die mögliche Zustände beschreiben. Unter einem Zustand verstehen wir dabei eine Situation, die nicht durch allgemeine Gesetze ein für allemal festgelegt ist, sondern die so oder auch anders sein kann und demgemäß mit der Zeit auch gelegentlich zu bestehen beginnt oder aufhört. Aussagen, die besagen, ein bestimmter Zustand liege vor, wurden in I als kontingent bezeichnet, nicht-kontingente Aussagen als

¹ C. F. v. WEIZSÄCKER, Naturwiss. 42, 521, 545 [1955], weiterhin als I zitiert; Z. Naturforsch. 13 a, 245 [1958], weiterhin als II zitiert.



zeitlos. „Es regnet“ ist eine kontingente Aussage, „zweimal zwei gleich vier“ eine zeitlose. Alle bewiesenen Sätze der Mathematik werden als zeitlos verstanden, aber auch alle allgemeinen Gesetze der Physik. Die Logik bezieht sich auch auf die zeitlosen Aussagen, und es ist schwer zu sehen, was für diese Aussagen „komplexe Wahrheitswerte“ bedeuten sollten. Scheinbar besonders schlagend läßt sich dieser Einwand so aussprechen: Schon die Mathematik, mit deren Hilfe wir die Quantentheorie formulieren, setzt die klassische Logik voraus. Anders ausgedrückt: Mögen die Aussagen über physikalische Zustände einer modifizierten „Logik“ genügen, so genügen doch die Aussagen, die wir über diese Aussagen machen können, der klassischen Logik.

Indem wir die Gültigkeit der klassischen Logik für zeitlose Aussagen undiskutiert lassen, müssen wir jedoch bemerken, daß bei dieser Unterscheidung eine Sorte von Aussagen nicht untersucht worden ist. Es gibt kontingente Aussagen über kontingente Aussagen. In I wurden die Aussagen a_k , von denen wir ausgingen, Grundaussagen genannt, die Aussagen der Form „ a_k hat den Wahrheitswert ψ_k “ Metaaussagen. „Welches a_k ist wahr?“ hieß Grundfrage, „welchen Wert ψ_k hat eine bestimmte Aussage a_k “ hieß Metafrage. Nun sind offensichtlich auch die Metaaussagen kontingent; sie geben ja den quantenmechanischen Zustand an. Ist die Grundfrage eine n -fache Alternative, so ist die Metafrage eine unendlichfache Alternative, denn der Zustandsraum enthält unendlich viele mögliche Zustände. Es ist offenbar eine sinnvolle Frage, ob auch Metafragen der Quantenlogik unterliegen. In (I, 8) wurde diese Frage hypothetisch bejaht. Hier untersuchen wir die mathematischen Konsequenzen dieser Hypothese. Die philosophische Frage nach dem Recht, mit dem wir dabei von „Logik“ reden², lassen wir beiseite, nachdem wir den hier benutzten Sinn dieses Wortes präzisiert haben.

Wir führen nun einen abstrakten „logischen“ Sinn des Wortes „Quantelung“ ein. In der bisher besprochenen n -fachen Alternative besteht die Quantelung in der Zuteilung komplexer Wahrheitswerte an die Grundaussagen. Die Hypothese, daß auch die Metafrage der Quantenlogik unterliege, besagt dann, daß man auch die Metaaussagen „quanteln“ dürfe oder müsse. Hierdurch entstehen Metametaaussagen, die eine dritte Quantelung erfordern. In der vorliegen-

den Arbeit beschränken wir uns auf drei Quantelungsschritte. Wir erreichen damit gerade die übliche wechselwirkungsfreie Quantenfeldtheorie. Die mathematischen Schwierigkeiten haben uns zunächst davon abgeschreckt zu fragen, was eine vierte Stufe bedeuten könnte.

Eine Hauptschwierigkeit ist, daß die richtige mathematische Prozedur der Quantelung nicht a priori bekannt ist. Wir werden im Lauf der Untersuchung zu zwei Schritten veranlaßt, die erst später im einzelnen erklärt werden können, hier aber schon genannt seien:

1. Präzisierung der Quantenbedingungen,
2. Verdoppelung des Zustandsraumes.

1. Daß gewisse „Quantenbedingungen“ präzisiert werden müssen, ist auf Grund der bisherigen Quantentheorie zu erwarten. Die Quantelung führt ja von einer „klassischen“ Theorie zu „ihrer“ Quantentheorie. Man kann aber unter Umständen eine gegebene klassische Theorie auf mehrere verschiedene Weisen quanteln. Zum Beispiel lassen klassische Feldtheorien die Quantelung nach der BOSE- oder nach der FERMI-Statistik zu; es hat subtiler mathematischer Untersuchungen bedurft, um den jeweils physikalisch passenden Typ der Quantenbedingungen festzulegen.

Unser Beispiel endlicher Alternativen muß als ein untypischer Sonderfall erscheinen. Normalerweise sind in einer klassischen Theorie kontinuierliche Variable wie Ort, Impuls, Feldstärke gegeben. In der Tat gehen wir nur dort von endlichen Alternativen aus, wo uns die Erfahrung schon über das Bestehen einer endlichen, diskreten Wertmannigfaltigkeit irgendeiner Größe belehrt hat, die aber dann erst in der Quantentheorie selbstverständlich wird. Bei der mehrfachen Quantelung tritt die Frage, wie eine kontinuierliche Variable zu quanteln sei, spätestens in der zweiten Stufe auf, denn auch wenn wir eine endliche Alternative a_k zugrunde legen, ist ihr Zustandsvektor ψ_k kontinuierlich.

In I wurde die abstrakte Quantelungsvorschrift naiv von der endlichen auf die unendliche Alternative übertragen. Ist x eine kontinuierliche Variable, so soll $\psi(x)$ den Wahrheitswert der Aussage „ x hat den Wert ξ “ bedeuten. In der vorliegenden Arbeit, in der wir mit einer endlichen Alternative beginnen, werden wir dieses Verfahren in der zweiten Stufe benutzen, aber nicht in der dritten. Wir gehen so unsystematisch vor, weil wir genau auf diese Weise die vertrauten Formeln der Quantenfeldtheorie erhalten.

² Philosophisch wäre wahrscheinlich die Bezeichnung „Ontologie“ treffender.

Die systematische mehrfache Quantelung nach einem festgelegten Verfahren, die Abweichungen von der bekannten Feldtheorie ergibt, besprechen wir dann im Abschnitt 9. Hier erläutern wir nur, worin sich ein „nicht-naives“ Verfahren von dem „naiven“ unterscheidet:

Wir wählen als Beispiel die klassische Mechanik eines Massenpunkts. Sie charakterisiert seinen Zustand durch zwei Vektoren \mathfrak{x} und \mathfrak{p} . Naiv würde man sagen: Die Aussage, das Teilchen sei am Ort \mathfrak{x} und habe den Impuls \mathfrak{p} , muß in der Quantentheorie den Wahrheitswert $\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$ bekommen. In Wirklichkeit muß man bekanntlich einen der beiden Vektoren fortlassen und den Zustand entweder durch $\psi(\mathfrak{x})$ oder durch $\psi(\mathfrak{p})$ charakterisieren³. Das kann man aber der klassischen Theorie nicht ohne weiteres ansehen. Die traditionelle Quantentheorie hält sich hier an die HAMILTONSche Formulierung der klassischen Theorie und schreibt Vertauschungsrelationen für konjugierte Variable vor. In der Quantenfeldtheorie führt dieses Verfahren aber zwangsläufig zur BOSE-Statistik, erweist sich also wiederum nicht als allgemeingültig. Diese Ungewißheit, welche „nicht-naive“ Quantelung zu wählen ist, braucht uns nicht zu überraschen. Solange eine klassische Theorie als Zusammenfassung irgendwelcher Erfahrungen gegeben ist, können wir zunächst nicht wissen, Grenzfall welcher Quantentheorie sie ist. Erst das systematische Ziel unserer Theorie der mehrfachen Quantelung erfordert eine schärfere Fixierung des Quantelungsschrittes. Aber vermutlich stoßen wir damit auf ein ungelöstes Grundproblem, und es mag erlaubt sein, daß wir uns, vom Vergleich mit der Erfahrung geleitet, langsam an es herantasten.

2. Die Verdopplung des Zustandsraums ist eigentlich ein spezieller Zug der Präzisierung der Quantenbedingungen, der sich uns an Hand der Erfahrung nahegelegt hat. Als eine prinzipielle Eigentümlichkeit des Quantelungsprozesses führen wir ihn in diese Arbeit neu ein, obwohl wir dabei nur einer Reihe bekannter, bisher unverknüpfter Tatsachen eine gemeinsame Deutung geben. Er besteht darin, jeder Aussage a_k nicht eine Zahl ψ_k , sondern ein Paar von Zahlen ψ_k, χ_k zuzuordnen, die sich bei linearen Invarianz-Transformationen des Zustands-

raums zueinander konjugiert-komplex transformieren. In der ersten Stufe bedeutet das den Übergang von Zweierspinoren zu Viererspinoren. Dies ist gleichbedeutend mit dem Übergang von Teilchen der Ruhmasse Null zu Teilchen von endlicher Masse. In der Tat gelingt es, aus dem verdoppelten Zustandsraum erster Stufe durch eine zweite Quantelung die DIRAC-Gleichung herzuleiten. In der zweiten Stufe erweist sich dann ebenfalls die Verdopplung des Zustandsraums als nötig, um die volle Lösungsmannigfaltigkeit der Wellengleichungen (einschließlich Antiteilchen) zu erhalten. In der dritten Stufe führt dieselbe Prozedur zur Möglichkeit, eine indefinite Metrik im HILBERT-Raum zu definieren.

2. Herleitung der Quantenfeldtheorie spin- und masseloser Teilchen durch dreimalige Quantelung einer einfachen Alternative

a) Erste Stufe: Impulsraum und LORENTZ-Gruppe

Wir beginnen willkürlich mit einer abstrakt gegebenen einfachen Alternative. Ihre mathematische Behandlung ist in II ausführlich besprochen. Wir wiederholen kurz:

Es seien zwei Aussagen a_1 und a_2 gegeben, von denen nach klassischer Auffassung genau eine wahr sein muß. Jeder quantentheoretisch mögliche Zustand wird durch ein komplexes Zahlenpaar u_A ($A=1, 2$) charakterisiert. Wir normieren die Spinoren u_A nicht. (Vgl. dazu Abschnitt 7.) Jedem u_A entspricht ein vierdimensionaler reeller Vektor k^μ ($\mu=0, 1, 2, 3$) nach der Gleichung

$$k^\mu = u_A^* \sigma^{\mu AB} u_B. \quad (2a, 1)$$

σ^m ($m=1, 2, 3$) sind die PAULI-Matrizen, $\sigma^0 = -\sigma_0$ ist die Einheitsmatrix. Zwischen den k^μ besteht die algebraische Beziehung

$$k^\mu k_\mu = 0. \quad (2a, 2)$$

Die Beschreibung des Zustandes durch die vier Zahlen k^μ ist also redundant und nur dadurch nahegelegt, daß einer linearen Transformation der u_A :

$$u'_A = s_A^B u_B \quad (2a, 3)$$

eine lineare Transformation der k^μ entspricht. Den unimodularen Transformationen der u_A entsprechen eigentliche LORENTZ-Transformationen der k^μ . Die oberen Indizes der u_A sind durch die Gleichungen

$$u^1 = -u_2, \quad u^2 = u_1 \quad (2a, 4)$$

definiert.

Versuch messen. Daß beide Messungen unverträglich sind, die zweite also den durch die erste geschaffenen Zustand zerstört, d. h. daß ψ nur vom Ausfall eines der beiden Versuche abhängen darf, lehrt nur die Erfahrung bzw. die fertige, empirisch geprüfte Quantentheorie des Spins.

³ Ein analoges Faktum gibt es, nur versteckter, bei der endlichen Alternative. So charakterisieren wir (vgl. II, 3) den Elektronenspin durch die zwei möglichen Ergebnisse eines STERN-GERLACH-Versuches. Wir könnten außer der z-Komponente des Spins, die so bestimmt wird, z. B. auch noch seine x-Komponente durch einen zweiten STERN-GERLACH-

$$u^A v_A = u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad (2a, 5)$$

ist eine Invariante der unimodularen Transformationen der u_A .

In II wurde auseinandergesetzt, daß dieser Formalismus auf viele verschiedene physikalische Situationen paßt. Wir wählen nun eine bestimmte, von allen dort besprochenen verschiedene Deutung, zunächst scheinbar willkürlich, aus und behaupten, daß gerade bei dieser Deutung die Formeln, die wir bei den nachfolgenden Schritten nochmaliger Quantelung erhalten werden, einen vertrauten physikalischen Sinn erhalten. Wir fassen von nun an k^μ als den Energie-Impuls-Vektor eines Teilchens der Ruhmasse Null auf.

In II, 3c war die Rede von der „prästabilierten Harmonie“ zwischen den Spinoren, die als quantentheoretische Beschreibung einfacher Alternativen eingeführt werden, und dem dreidimensionalen euklidischen Raum der Physik bzw. der vierdimensionalen pseudoeuklidischen MINKOWSKI-Welt. Bisher konnte man nur sagen, daß die LORENTZ-Gruppe erfreulicherweise eine (zweideutige) Darstellung auf dem Raum der Spinoren besitzt. Wir drehen nun dieses Verhältnis um und behaupten hypothetisch: *Die spezielle Relativitätstheorie, soweit sie eine mathematische Theorie von Raum und Zeit ist, ist bereits die Quantentheorie einer tiefer liegenden einfachen Alternative. Die LORENTZ-Gruppe ist eine (untreue) reelle Darstellung der Gruppe der komplexen linearen Transformationen des quantenmechanischen Zustandsraumes jener Alternative.*

Wir müssen dies präzisieren. Von Raum und Zeit dürfen wir, streng genommen, noch nicht reden, denn wir haben k^μ nicht als Raum-Zeit-Vektor, sondern als Impuls-Energie-Vektor bezeichnet. In der Tat entsprechen den Spinor-Transformationen nur die homogenen LORENTZ-Transformationen, denen der Impulsraum unterliegt; für die inhomogenen Raum- und Zeittranslationen haben wir in dieser Stufe keine Deutung. Wir fassen die Angabe von k^μ als die zeitlose Beschreibung des Zustandes eines kräftefreien Teilchens auf. Größen, die als Koordinaten in Raum und Zeit gedeutet werden können, werden dann in der nächsten Quantelungsstufe von selbst auftreten. Wir haben es ferner nicht mit beliebigen Teilchen, sondern mit solchen von verschwindender Ruhmasse zu tun, denn die Ruhmasse ist, wenn \mathfrak{f} ein Impuls ist, die Wurzel aus der Invarianten $-k^\mu k_\mu$, die in unserem Fall identisch verschwindet.

Es fragt sich noch, was die Ausgangsalternative bei unserer jetzigen Deutung für einen physikalischen Sinn hat. Nach II, 3c könnte es naheliegen, sie mit der Spinalternative zu identifizieren. In 4. werden wir in der Tat sehen, daß sie einen nahen Zusammenhang mit dem Spin hat. Auf der jetzigen Betrachtungsstufe wollen wir aber den Spin noch nicht einführen und können dann nur sagen: Diese Alternative verhält sich zur Angabe der Impulsrichtung im Raum ähnlich wie die Spinalternative eines STERN-GERLACH-Versuches zur Angabe der Spinrichtung im Raum. Ein Experiment, das den Impuls zwingen könnte, zwischen genau zwei Werten seiner z -Komponente zu wählen, ist in der Physik nicht bekannt. So müssen wir unserer Grundalternative einen sehr abstrakten Charakter lassen.

Eine Bemerkung verdient das Vorzeichen von k^0 . Die nullte Komponente der Gl. (2a, 1) lautet ausgeschrieben

$$k_0 = u_1^* u_1 + u_2^* u_2. \quad (2a, 6)$$

Diese Größe ist positiv definit; hätten wir u_A normiert, so hätten wir sie gleich Eins gesetzt. Die quadratische Gleichung $k^\mu k_\mu = 0$ läßt aber zu jedem Impulsvektor \mathfrak{f} neben dem positiven k^0 auch ein negatives vom selben Betrag zu. Negativem k^0 entspricht aber nach unserer Definition überhaupt kein Spinor. Wenn also, wie wir annehmen, der Spinor das Primäre ist und Energie und Impuls nur eine Beschreibungsweise für den Spinor sind, so erhalten wir nur die Hälfte der Lösungen der Gleichung $k^\mu k_\mu = 0$ und die Energie ist bei uns *ex definitione* positiv definit. Wir werden aber später sehen, daß wir alle Lösungen der Gleichung brauchen; dies wird eines der Argumente für die Verdopplung des Zustandsraumes, also für eine Modifikation der Quantelungsvorschrift sein.

b) Zweite Stufe: Wellengleichung

Sind 1 und 2 die Antworten auf unsere „Grundfrage“, so ist die Angabe eines Spinors u_A bzw. eines „lichtartigen“ Vierervektors k^μ die Antwort auf die zugehörige Metafrage⁴. Nun wenden wir auf diese Metafrage die Komplementaritätslogik an. Das heißt wir nehmen an, zu jedem möglichen Wert von k^μ gehöre eine komplexe Zahl $\varphi(k^\mu)$ als Wahrheitswert

⁴ Da wir nicht normiert haben, stellen wir die Frage, ob der Spinor selbst oder ein Strahl im Spinorraum den Zustand beschreibe, zurück. Vgl. Abschnitt 7.

der Aussage, der durch k^μ charakterisierte Zustand liege vor. Die Metafrage der ersten Stufe wird so zur Grundfrage der zweiten Stufe. Im Sinne unserer physikalischen Deutung sind die möglichen Antworten auf die Metafrage der zweiten Stufe, also die möglichen Funktionen $\varphi(k^\mu)$, die Wellenfunktionen im Impulsraum der k^μ . Diese Behauptung bedarf einer dreifachen Erläuterung.

Erstens haben wir hier im Sinne von 1. „naiv“ gequantelt. Was sich bei nicht-naiver Quantelung ergäbe, soll in 9. besprochen werden.

Zweitens haben wir die Mannigfaltigkeit möglicher Zustände dadurch etwas eingeschränkt, daß wir φ von k^μ statt von u_A abhängen lassen. k^μ drückt ja nur drei der vier reellen Zahlen aus, die das komplexe Zahlenpaar u_A bestimmen. Die Phase von u_A geht in k^μ verloren. Nun gilt die Phase der Wellenfunktion als unbeobachtbar; doch wäre ihre grundsätzliche Bedeutung im Sinne der mehrfachen Quantelung noch einmal zu überprüfen. Dies überlassen wir einer späteren Arbeit und bemerken nur, daß wir im Abschnitt 6 von der Phase Gebrauch machen werden.

Drittens dürfen wir nicht alle mathematisch möglichen Funktionen $\varphi(k^\mu)$ zulassen. k^μ muß ja die Gleichung $k^\mu k_\mu = 0$ erfüllen und überdies muß wegen (2 a, 6) die Ungleichung $k^0 > 0$ gelten. k^μ muß also auf dem positiven Nullkegel des Impulsraumes liegen. Wir könnten uns demnach auf Funktionen beschränken, die nur auf dem positiven Nullkegel definiert sind. Zum gleichen Ziel wird es uns führen, wenn wir formal Funktionen zulassen, die im ganzen k^μ -Raum definiert sind, und dann als Nebenbedingung fordern, daß diese Funktionen überall außerhalb des positiven Nullkegels verschwinden. Wir machen mit dieser Festsetzung bei der statistischen Deutung der Quantentheorie, die wir im übrigen noch nicht benutzen, die Anleihe, daß $\varphi(x') = 0$ heißt: Der Wert $x = x'$ kommt in dem durch φ beschriebenen Zustand nicht vor. Physikalisch heißt das: Wer nur weiß, daß der Zustand erster Stufe durch Impuls und Energie charakterisiert ist, könnte denken, beliebige Wertekombinationen dieser beiden Größen seien möglich; er wird den vollen Impuls-Energie-Raum als Variationsbereich des Zustands zulassen. Wer aber weiß, daß der Zustand erster Stufe eigentlich durch einen Spinor bestimmt ist, weiß, daß zwischen Impuls und Energie *ex definitione* die Beziehung $k^\mu k_\mu = 0$ besteht. Nur unsere redundante Zustandsbeschreibung läßt diese notwen-

dige Bedingung, der der Vektor k^μ genügen muß, als ein zusätzliches Naturgesetz erscheinen.

Mathematisch bequem formuliert man die Forderung, daß $\varphi(k^\mu)$ außerhalb des positiven Nullkegels verschwindet, durch die Gleichung

$$k^\mu k_\mu \varphi(k^\nu) = 0 \quad (2 \text{ b, } 1)$$

mit der Nebenbedingung, daß $k^\mu k_\mu$ nur für $k^0 > 0$ gemeint ist. In der Tat, ist $k^\mu k_\mu = 0$, so ist φ beliebig; ist $k^\mu k_\mu \neq 0$ oder $k^0 < 0$, so muß $\varphi = 0$ sein.

Eine andere, formal nicht invariante Schreibweise hiervon ist

$$\left(k^0 - \sqrt{\sum_{l=1}^3 (k^l)^2} \right) \varphi(k^\lambda) = 0. \quad (2 \text{ b, } 2)$$

Das Transformationsverhalten der $\varphi(k^\mu)$ bei LORENTZ-Transformation der k^μ sei das einer Invarianten. Dann sind die Gln. (2 b, 1) und (2 b, 2) ebenfalls invariant.

Eine andere Beschreibungsweise des so gewonnenen Zustandsraumes der $\varphi(k^\mu)$ erhalten wir, wenn wir zu Funktionen $\psi(x_\mu)$ übergehen mit Hilfe der FOURIER-Transformation

$$\begin{aligned} \psi(x_\nu) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi(k^\lambda) \exp(i k^\mu k_\mu) d^4 k, \\ \varphi(k^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \psi(x_\lambda) \exp(-i k^\mu x_\mu) d^4 x, \end{aligned} \quad (2 \text{ b, } 3)$$

die in dieser Form natürlich nur symbolisch zu verstehen ist, sich aber mit einigem mathematischem Aufwand rechtfertigen läßt. Die Gl. (2 b, 1) geht in der neuen Darstellung in die bekannte Wellengleichung über:

$$\square \psi = 0. \quad (2 \text{ b, } 4)$$

Wir wollen wieder unter Verweis auf Abschnitt 7 darauf verzichten, die Wellenfunktion $\varphi(k^\mu)$ zu normieren. Insofern können wir den genauen Sinn unserer 2. Stufe als Quantentheorie noch nicht erörtern. Wir machen nur die folgenden Bemerkungen.

Wie bekannt, ist es möglich, $\varphi(k^\mu)$ relativistisch invariant zu normieren; insofern läßt φ eine Deutung als Zustandsvektor eines Teilchens vom Impuls k^μ zu. Diese Normierung gestattet aber nicht, x_m als Ortsoperator dieses Teilchens aufzufassen; insofern ist die Wellengleichung (2 b, 4) keine SCHRÖDINGER-Gleichung⁵. Wenn wir nachher den Spin einführen, werden wir auch in der 2. Stufe eine echte SCHRÖDIN-

⁵ Vgl. hierzu die Arbeit von T. D. NEWTON u. E. P. WIGNER, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 [1949].

GER-Gleichung des Einteilchenproblems (die kräftefreie DIRAC-Gleichung) gewinnen.

c) Dritte Stufe: Quantenfeldtheorie

Wiederholen wir den Quantelungsschritt noch einmal, so wird die Frage nach der Wellenfunktion $\varphi(k^\mu)$ zur Grundfrage. Wir vollziehen also eine Quantelung der Wellen, die seit KLEIN und JORDAN⁶ auch als „zweite Quantelung“ bezeichnet wird. Es scheint uns, daß unser Verfahren den physikalischen Sinn dieser Bezeichnung aufdeckt. Die Wellenfunktion $\varphi(k^\mu)$ tritt nun legitim in doppelter Bedeutung auf: In unserer zweiten Stufe als Zustandsfunktion einer Quantentheorie, in unserer dritten Stufe als „klassische“ Welle im Impulsraum. Da wir eine der bisherigen Theorie unbekannte erste Stufe unter die klassische Einteilchentheorie geschoben haben, ist die bisherige zweite Quantelung bei uns die dritte.

Damit dürfen wir auch die Wellengleichung (2 b, 4) als „klassische“ Wellengleichung im Sinne der Feldtheorie und somit die vier Komponenten von x_μ als Koordinaten in Raum und Zeit auffassen. x_μ zeigt das richtige Transformationsverhalten gegenüber der LORENTZ-Gruppe. Wie schon gesagt, induzieren unimodulare Transformationen des Spinors u_A homogene LORENTZ-Transformationen (ohne Spiegelungen) von k^μ . Fordern wir, wie schon durch die Schreibweise $k^\nu x_\nu$ angedeutet, daß der Exponent in der FOURIER-Transformation hierbei invariant bleibt, so muß auch x_ν nach der homogenen LORENTZ-Gruppe transformiert werden. Dies folgt so aus der von uns gewählten Definition von x_ν . Gl. (2 b, 3) ist aber außerdem nicht die einzig mögliche FOURIER-Transformation. Wir hätten im Exponenten auch

$$k^\nu (x_\nu + x_{\nu}^{(0)})$$

schreiben können mit einem beliebig, aber fest gewählten Raum-Zeit-Vektor $x_{\nu}^{(0)}$ ohne die Gl. (2 b, 4) zu ändern. Dies käme einer anderen Definition der Raum-Zeit-Vektoren gleich. Der Übergang von einer dieser Definitionen zur anderen entspricht dem inhomogenen Glied der LORENTZ-Transformation. Also läßt, wie erforderlich, der Impuls k^μ die homogene, der Ort x_ν die inhomogene LORENTZ-Gruppe zu.

Fassen wir die Theorie der zweiten Stufe als eine klassische Feldtheorie auf, so können wir auf sie die alte, von BOHR vielfach benutzte begriffliche Unterscheidung der Raum-Zeit-Beschreibung von der

Kausalität anwenden. $\psi(x_\nu)$ ist der als Funktion von Ort und Zeitpunkt definierte Zustand, die Wellengleichung $\square \psi = 0$ gibt den gesetzmäßigen (kausalen) Zusammenhang zwischen den Zuständen an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten an. Im Sinne unserer Auffassung, welche eine in der klassischen Theorie verborgene Quantentheorie aufzuspüren sucht, ist diese Unterscheidung nur eine Folge der redundanten Beschreibung des Zustands erster Stufe durch k^μ statt u_A , denn erst diese macht die Nebenbedingung $k^\mu k_\mu = 0$ nötig, aus der die Wellengleichung folgt.

Wir bemerken noch, daß wir in der dritten Stufe nicht „naiv“ quanteln dürfen. Dies hätte ja, wie in I behauptet, durch ein Funktional zu geschehen, das jedem Funktionsverlauf $\varphi(k^\mu)$ eine komplexe Zahl $\Phi[\varphi(k^\mu)]$ zuordnet. Tatsächlich muß man aber $\varphi^*(k^\mu)$ und $\varphi(k^\mu)$ als unvertauschbare Operatoren auffassen. Als Argumente einer quantentheoretischen Zustandsfunktion (wie hier Φ) treten die Eigenwerte von Operatoren auf. φ kann man aber gar nicht diagonalisieren. Denn φ und φ^* können als adjungierte Operatoren nur zugleich diagonal sein, als unvertauschbare Größen aber können sie nicht zugleich diagonal sein; also können sie überhaupt nicht diagonal sein. Also gibt es keine Zustände, in denen φ überhaupt einen bestimmten Wert hat, und es ist sinnlos, solchen Zuständen ein Φ zuzuschreiben. Vgl. dazu die Abschnitte 7 und 9.

In der vorliegenden Arbeit werden wir weiterhin im wesentlichen die ersten beiden Stufen untersuchen.

3. Spin 1/2: Weylsche Gleichung

Die im vorigen Abschnitt besprochenen Teilchen ohne Spin und Ruhmasse scheint es in der Natur nicht zu geben. Wir haben sie nur als das einfachste Modell an die Spitze gestellt. In den nun folgenden Abschnitten wollen wir zeigen, wie sich Teilchen, die aus der Erfahrung bekannt sind, durch einfache Umdeutungen bzw. Erweiterungen unseres Ansatzes darstellen lassen. Daß derselbe mathematische Ansatz viele verschiedene physikalische Situationen beschreibt, ist ja der Ausgangspunkt aller unserer Überlegungen. Wir wollen zeigen, daß alle Theorien kräftefreier Teilchen gewonnen werden können, wenn man die Beziehung von k^μ zum Impuls im wesentlichen aufrechterhält, aber durch neue Deutungsvorschriften und eine Erweiterung den Spin und die

⁶ O. KLEIN u. P. JORDAN, Z. Phys. 45, 751 [1927].

Ruhmasse sowie die Existenz von Antiteilchen einführt.

Im vorliegenden Abschnitt halten wir daran fest, daß k^μ genau der Impuls des betrachteten Teilchens sein soll. Wegen $k^\mu k_\mu = 0$ ist das Teilchen dann weiterhin masselos. Hingegen nehmen wir an, daß die Ausgangsalternative gleichzeitig die Spinalternative sei, das Teilchen also den Spin $1/2$ habe. Damit involvieren wir, daß der Spin stets parallel zum Impuls steht. Das ist aber bekanntlich in der Zweikomponententheorie des Neutrinos gerade der Fall. Wir werden eine Gleichung herleiten, die bei unserer Deutung gerade die WEYLSche Wellengleichung des kräftefreien Neutrinos ist.

In II wurde die Gleichung [dort (2 a, 17)] abgeleitet:

$$k_\mu \sigma^{\mu AB} u_B = 0. \quad (3, 1)$$

Sie ist eine allgemeingültige Folge unserer Definition der k^μ als Funktionen der u_A und bedeutet, daß $k_\mu \sigma^{\mu AB}$ ein Operator ist, der auf die zum Vektor u_B „senkrechte“ Richtung projiziert. Nun bilden wir wieder die Impulsraum-Wellenfunktion (2. Stufe) $\varphi(k^\mu)$ und definieren mit ihrer Hilfe neue „Spin-eigenfunktionen im Impulsraum“:

$$\varphi_A(k^\mu) = u_A \varphi(k^\mu). \quad (3, 2)$$

φ_A enthält nicht mehr Information als φ . Aus einer Umkehrung der Funktionen $k^\mu(u_A)$ ergibt sich ja $u_A(k^\mu)$ als eine freilich nicht eindeutige Funktion. Lösung des Gleichungspaares (3. 1) [vgl. II (2. 18)] liefert explizit

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{k^0 + k^3}{k^1 + i k^2}. \quad (3, 3)$$

Der Absolutwert von u_1 und u_2 folgt aus der Definition von k^0 (2a. 6). Damit bleibt nur die Phase von u unbestimmt; diese geht aber in der ebenfalls unbestimmten Phase von φ unter. In unserer jetzigen Deutung heißt all dies eben, daß die Richtungen von Impuls und Spin übereinstimmen müssen. Multipliziert man nun die „WEYLSche Gleichung 1. Stufe“ (3. 1) mit $\varphi(k^\mu)$, so erhält man die WEYLSche Gleichung 2. Stufe im Impulsraum:

$$k_\mu \sigma^{\mu AB} \varphi_B(k^\nu) = 0. \quad (3, 4)$$

Durch die FOURIER-Transformation

$$\psi_A(x^\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi_A(k^\mu) \exp(i k^\lambda x_\lambda) d^4k \quad (3, 5)$$

geht aus ihr die WEYLSche Gleichung im Ortsraum

$$\sigma^{\mu AB} \frac{\partial \psi_B}{\partial x^\mu} = 0 \quad (3, 6)$$

hervor, die auch als DIRAC-Gleichung zweikomponentiger masseloser Teilchen aufgefaßt werden kann.

Wir fügen noch eine Bemerkung über die Beziehung dieser Theorie zu der des vorigen Abschnitts hinzu. Die beiden Theorien unterscheiden sich in den Formeln überhaupt nicht, sondern nur in der Deutung. Für spinlose Teilchen wird man jedoch den redundanten Ausdruck φ_A nicht benutzen. Hingegen ist auch für spinbehaftete masselose Teilchen das einfache φ die sparsamste Zustandsbeschreibung; erst für Teilchen mit Ruhmasse (nächster Abschnitt) liefert der Spinindex zusätzliche Information. Wegen $k^\mu k_\mu = 0$ gilt sowohl $\square \varphi_A = 0$ als auch, wenn ψ durch (2 b. 3) definiert wird, $\square \psi = 0$. Dies überrascht zunächst, da ψ , als skalare Funktion, einem spinlosen Teilchen zugehören scheint. Jedoch ist ψ bei unserer jetzigen Deutung überhaupt keine Wellenfunktion (auch keine klassische) im Ortsraum, denn die Räume, in denen ψ und φ_A definiert sind, dürfen nicht identifiziert werden. Aus dem gebrochenen Ausdruck (3. 3) ist zu sehen, daß u_A im „Ortsraum“ von ψ kein Differentialoperator ist, sondern ein Integraloperator, den man erhält, wenn man zuerst die Umkehrung von (2 b. 2) auf ψ anwendet, das erhaltene φ mit $u_A(k^\mu)$ multipliziert und dann nach (3. 6) transformiert.

4. Verdopplung des Zustandsraumes 1. Stufe: Dirac-Gleichung

Die Einführung der Ruhmasse und der Antimaterie (Abschnitt 5) gelingt durch eine einzige Erweiterung unserer Quantelungsvorschrift, die Verdopplung des Zustandsraumes. Jeder Aussage A soll von nun an als „quantenlogischer Wahrheitswert“ nicht eine komplexe Zahl u_A , sondern ein Paar komplexer Zahlen u_A, v_A^* zugeordnet werden. Indem wir der zweiten Zahl einen Stern angehängt haben, haben wir die Forderung bezeichnet, bei den die Grundgleichungen invariant lassenden linearen Transformationen des Zustandsraumes solle der Faktor von v_A^* jeweils das Komplex-konjugierte des Faktors von u_A sein. Da wir in der vorliegenden Arbeit die Theorie dieser Gruppen noch nicht untersuchen, lassen wir hier offen, ob dies eine Einschränkung der Allgemeinheit ist oder nicht; jedenfalls wollen wir uns an sie halten. In der ersten Stufe könnten wir statt des Sterns mit v. d. WAERDEN punktierte Indizes verwenden; in den höheren Stufen ist aber diese Schreibweise nicht üblich und so verzichten wir

auf sie⁷. Sofern bei mehrfacher Quantelung für u_A und v_A^* Vertauschungsrelationen aufgestellt werden, wird der Unterschied zwischen gesternten und ungesterten Größen wesentlich, und v_A^* soll dann als gesternte Größe behandelt werden.

Wir verdoppeln zunächst den Zustandsraum der ersten Stufe. Das heißt, wir definieren eine vierkomponentige Größe (Viererspinor), die wir alsbald in zwei Schreibweisen einführen:

$$\begin{aligned} r_1 &= u_1, & w_1 &= u_1, \\ r_2 &= u_2, & w_2 &= u_2, \\ r_3 &= v_1^*, & w_3 &= v_1^*, \\ r_4 &= v_2^*, & w_4 &= v_2^*. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die von 1 bis 4 laufenden Indizes numerieren wir mit kleinen lateinischen Buchstaben. r_a ist im Sinne unserer Theorie am durchsichtigsten gebaut. w_a hat die v mit oberen Indizes, die gemäß (2 a. 4) definiert sind. Also ist $w_3 = -r_4$, $w_4 = r_3$. w_a ist der traditionellen Form der DIRAC-Gleichung angepaßt.

Statt u und v können wir zwei reelle Vierer-Null-Vektoren einführen:

$$k^\mu = u_A^* \sigma^{\mu AB} u_B, \quad l^\mu = v_A^* \sigma^{\mu AB} v_B \quad (4.2)$$

bzw. deren Summe und Differenz

$$p^\mu = k^\mu + l^\mu, \quad s^\mu = k^\mu - l^\mu. \quad (4.3)$$

Wir werden die DIRAC-Gleichung in der üblichen Bedeutung erhalten, wenn wir p^μ als den Impuls-Energie-Vektor des Teilchens auffassen. s^μ ist dann bis auf einen Normierungsfaktor eine mögliche Definition des Spinvektors. Wenn wir diese Behauptungen begründen können, so werden wir das Fermion endlicher Ruhmasse als Ergebnis einer Überlagerung zweier Alternativen erster Stufe auffassen können, von denen eine einem Neutrino der bisher betrachteten Art, die andere einem Neutrino mit entgegengesetzt an den Impuls gekoppelten Spin entspricht. Die ersten beiden Komponenten des Viererspinors in (4.1) entsprechen der ersten, die letzten beiden der zweiten Alternative. r_1 und r_3 entsprechen gleicher Impulsrichtung der beiden Komponenten, w_1 und w_3 gleicher Spinrichtung, letzteres gemäß der üblichen Darstellung der DIRACschen Theorie.

p^μ und s^μ sind nicht mehr Nullvektoren. Vielmehr gilt

$$p^\mu p_\mu = -s^\mu s_\mu = 2 k^\mu l_\mu = -m^2, \quad (4.4)$$

$$p^\mu s_\mu = 0. \quad (4.5)$$

⁷ Wir müssen nur beachten, daß bei Transformationen im Spinraum die beiden Indizes von $\sigma^{\mu AB}$ und ähnlichen Matrizen nicht gleicher Art sind, sondern daß der erste Index punktiert, der zweite unpunktirt zu verstehen ist.

m ist vorerst nur ein Name für eine relativistische Invariante, welche dem durch r_a bzw. w_a charakterisierten Zustand zugeordnet ist.

Wir führen nun den Kalkül der α - bzw. γ -Matrizen ein. Führen wir zunächst, wie es verbreitet ist, keine oberen Spinindizes ein, so lassen sich unsere Definitionen sehr einfach in die DIRACsche α -Schreibweise umsetzen:

$$p^\mu = w_a^* \alpha_{ab}^\mu w_b \quad s^\mu = w_a^* \sigma_{ab}^\mu w_b \quad (4.6)$$

$$\text{mit} \quad \alpha^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^m = \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$(\sigma_{ab}^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{ab}^m) = \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & -\sigma^m \end{pmatrix}.$$

Hier sind die σ^m die zweireihigen PAULI-Matrizen und die 1 ist eine zweireihige Einheitsmatrix. Der Vorzeichenwechsel in der 3. und 4. Komponente folgt aus der Wahl der w -Schreibweise und den Relationen

$$l^\mu = v_A^* \sigma^{\mu AB} v_B = v_A^* \sigma^{\mu AB} v_B, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{AB}^0 = \sigma^{0AB}, \quad \sigma_{AB}^m = -\sigma^{mAB}. \quad (4.9)$$

Diese α -Schreibweise ist der Auffassung der w_a als quantentheoretische Zustandsvektoren angepaßt. p^0 ist die Norm von w_a . (Übrigens definiert (σ_{ab}^0) eine abweichende, indefinite Metrik des Zustandsraums.) Aber diese Schreibweise läßt die LORENTZ-Invarianz der Theorie nicht hervortreten. In der Tat lassen ja die unimodularen Transformationen der u_A , v_A^* die Normen k^0 , l^0 nicht invariant. Die Bedeutung der LORENTZ-invarianten γ -Schreibweise wird wohl am klarsten, wenn wir zugleich bezüglich einer LORENTZ-Invariante von w_a obere Indizes einführen.

w_a hat eine komplexe LORENTZ-Invariante:

$$\lambda = u_A v^A = w_1 w_3^* + w_2 w_4^*. \quad (4.10)$$

Die in (4.4) auftretende Invariante m ist bis auf den Faktor 2 der Betrag von λ :

$$-2 k^\mu l_\mu = m^2 = 4 \lambda^* \lambda. \quad (4.11)$$

Zwei weitere reelle Invarianten sind der (doppelte) Real- und Imaginärteil von λ :

$$z = \lambda + \lambda^*, \quad \mu = \frac{1}{i} (\lambda - \lambda^*) \quad (4.12)$$

$$\text{mit} \quad z^2 + \lambda^2 = m^2. \quad (4.13)$$

Wir führen nun die oberen Indizes von w_a ein durch die Forderung

$$w^{a*} w_a = i \mu. \quad (4.14)$$

Das ergibt

$$w^1 = w_3, \quad w^2 = w_4, \quad w^3 = -w_1, \quad w^4 = -w_2. \quad (4.15)$$

Unser w^{a*} ist derselbe Spinor, der vielfach w^* genannt wird (wobei man dann meist keine oberen

Indizes schreibt) und unsere Invarianten sind

$$i\mu = w^+ w, \quad \kappa = w^+ \gamma_5 w. \quad (4.16)$$

Die Schreibweisen gehen ineinander über durch

$$w^{a*} = (w_a)^+ = w_b^* \varepsilon^{ab}. \quad (4.17)$$

In den zwei letzten Gleichungen sind

$$(\varepsilon^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

wobei 1 wieder zweireihige Einheitsmatrizen sind.

Nun schreiben sich die Impuls- und Spin-Vektoren

$$\left. \begin{aligned} p^\mu &= w^+ \gamma^\mu w = w^{a*} \gamma_a^\mu{}^b w_b, \\ s^\mu &= w^+ \gamma_5 \gamma^\mu w = w^{a*} \gamma_5^a{}^b \gamma_b^\mu{}^c w_c \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

$$\text{mit } (\gamma_a^\mu{}^b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma_5^a{}^b) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu\nu} \\ \sigma^{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\text{und } \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (4.21)$$

In dieser Schreibweise sind die α nichts anderes als die γ mit zwei oberen Indizes:

$$\alpha^\mu = \varepsilon \gamma^\mu.$$

Wir wenden jetzt auf w den Operator $p_\mu \gamma^\mu$ an und führen die Rechnung wegen der Wichtigkeit des Resultats explizit vor:

$$\begin{aligned} p_\mu \gamma^\mu w &= (k_\mu + l_\mu) \gamma^\mu \begin{Bmatrix} u_A \\ v_{A^*} \end{Bmatrix} \\ &= (k_0 + l_0) \begin{Bmatrix} -\sigma_{AB}^0 v_B^* \\ \sigma_{AB}^0 u_B \end{Bmatrix} + (k_m + l_m) \begin{Bmatrix} \sigma_{AB}^m v_B^* \\ \sigma_{AB}^m u_B \end{Bmatrix} \\ &= (k_\mu + l_\mu) \begin{Bmatrix} -v_B^* \sigma_{BA}^\mu \\ \sigma_{AB}^\mu u_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k^\mu v_B^* \sigma_{BA}^\mu \\ l_\mu \sigma_{AB}^\mu u_B \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -u_C^* \sigma_{\mu}^{CD} u_D v_B^* \sigma_{BA}^\mu \\ v_C^* \sigma_{\mu}^{CD} v_D \sigma_{AB}^\mu u_B \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} -\delta_B^C \delta_A^D u_C v_B^* u_D \\ \delta_C^A \delta_D^B u_B v^D v_C^* \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\lambda^* u_A \\ \lambda v_{A^*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (i\mu - \kappa) u_A \\ (i\mu + \kappa) v_{A^*} \end{Bmatrix} = i\mu w - \kappa \gamma_5 w. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Hierbei wurde von den Relationen $k_\mu \sigma^\mu u = 0$, $(l_\mu \sigma^\mu v)^* = 0$ und

$$\sigma^{AB} \sigma_{\mu CD} = \delta_C^A \delta_D^B \quad (4.23)$$

Gebrauch gemacht.

Wir können das Ergebnis schreiben:

$$\{p_\mu \gamma^\mu + (w^+ w) - (w^+ \gamma_5 w) \gamma_5\} w = 0. \quad (4.24)$$

Diese Gleichung ist formal genau so geschrieben wie die Gleichung (für c -Zahl-Wellenfunktionen), welche HEISENBERG und PAULI soeben als Grundlage der Theorie der Elementarteilchen vorschlugen. Daß wir eine Gleichung erhalten, die sich zwanglos so schreiben läßt, möchten wir als einen Hinweis auf eine enge Beziehung zwischen unserer Theorie und der

VON HEISENBERG und PAULI ansehen. Wir können aber die Art dieser Beziehung bisher nicht angeben. So wie wir (4.24) hergeleitet haben, hat diese Gleichung eine wesentlich andere Bedeutung als die von HEISENBERG und PAULI. Die letztere ist eine Wellengleichung im Ortsraum. Statt unseres w enthält sie ein vom Ort abhängiges ψ , das in unserer Sprechweise eine Wellenfunktion der 2. Stufe ist. Unser w ist erster Stufe. Führen wir analog zu (3.2) eine Wellenfunktion φ_a zweiter Stufe ein, so erhält man für diese zunächst eine zu (3.7) analoge lineare Gleichung im Impulsraum, die der HEISENBERG-PAULISCHEN Gleichung nicht auf eine triviale Weise zugeordnet werden kann. Wir kommen auf dieses Problem im 9. Abschnitt zurück und zeigen hier nur, unter welchen Bedingungen die zu (3.7) analoge Gleichung als DIRAC-Gleichung im Impulsraum gedeutet werden kann.

Wir bilden die Zustandsfunktion 2. Stufe $\varphi(p^\mu)$ und

$$\varphi_a(p^\mu) = w_a \varphi(p^\mu). \quad (4.25)$$

φ_a enthält nun mehr Information als φ , da der Spin jetzt vom Impuls entkoppelt ist. Die LORENTZ-Invarianten sind Zustandsfunktionen. Wir betrachten nun willkürlich nur Zustände mit universell festen Invarianten κ und μ . κ ist ein Pseudoskalar, den wir willkürlich $=0$ setzen. Dann folgt

$$\mu = -i w^+ w = -m \quad (4.26)$$

mit willkürlicher Vorzeichenwahl für m , und die „DIRAC-Gleichung 1. Stufe“

$$(p_\mu \gamma^\mu - i m) w = 0 \quad (4.27)$$

und 2. Stufe:

$$(p_\mu \gamma^\mu{}^a{}_b - i m) \varphi_a = 0. \quad (4.28)$$

Indem wir so in der Tat die DIRAC-Gleichung kräftefreier Teilchen gewonnen haben, haben wir offenbar von den in unserem Ansatz enthaltenen Freiheiten keinen vollen Gebrauch gemacht. Die Festlegung auf $\kappa=0$ und festes μ dürfte, als Ausdruck der Quantelung möglicher Massenwerte, erst aus einer Theorie der Wechselwirkung folgen. Im Sinne unseres Ansatzes ist es aber auch inkonsequent, nur $\varphi(p^\mu)$ statt $\varphi(p^\mu, s^\mu)$ einzuführen. Die Schreibweise (4.25) liefert nicht einmal alle Lösungen der DIRAC-Gleichung mit positivem p^0 . Bei festem Impulsvektor p^μ sind noch zwei Spinrichtungen möglich, denen gemäß zwei Funktionen $\varphi^{(1)}(p^\mu)$ und $\varphi^{(2)}(p^\mu)$ zu definieren sind. Zu demselben p^μ gehören dann zwei verschiedene Viererspinoren $v^{(1)}$ und $w^{(2)}$ und die

volle DIRACsche Wellenfunktion muß geschrieben werden

$$\varphi_a(p^\mu) = w_a^{(1)} \varphi^{(1)}(p^\mu) + w_a^{(2)} \varphi^{(2)}(p^\mu). \quad (4.29)$$

Dieses φ_a genügt ebenfalls (4.28), wenn die beiden w zum selben Massenwert m gehören. Wie sich diese Schreibweise zur Einführung eines $\varphi(p^\mu, s^\mu)$ verhält, untersuchen wir hier nicht.

Wir bemerken schließlich, daß wir, statt s^μ als Spinvektor zu deuten, auch p^μ (oder s^μ) als Impuls eines spinlosen Teilchens hätten auffassen und aus (4.4) unmittelbar die KLEIN-GORDON-Gleichung

$$(\square - m^2) \psi = 0 \quad (4.30)$$

ableiten können.

5. Verdopplung des Zustandsraumes 2. Stufe: Antimaterie

Bisher haben wir die Nebenbedingung $k^0 > 0$ mitgeführt, und demgemäß in 4. die Bedingungen $l^0 > 0$ und $p^0 > 0$. Andererseits lassen die Gleichungen $k^\mu k_\mu = 0$, $k_\mu \sigma^\mu u = 0$ und $(p_\mu \gamma^\mu - i m) w = 0$ jeweils positive und negative k^0 bzw. p^0 als Lösungen zu, und daher auch die aus ihnen gewonnenen Wellengleichungen. Da wir in dieser Arbeit die Zustandsvektoren und nicht die Gleichungen als das Primäre auffassen, würde es naheliegen, die Lösungen mit negativen k^0 bzw. p^0 zu verwerfen. Andererseits macht die Physik von diesen Lösungen einen empirisch bewährten Gebrauch und im Falle der Wechselwirkung, den wir freilich bisher nicht behandeln können, ist die Trennung beider Lösungstypen nicht scharf aufrechtzuerhalten. Wir können nun in der Tat die Einführung der „negativen“ Lösungen als eine der Einführung der Viererspinoren analoge Verdopplung des Zustandsraumes in der zweiten Stufe auffassen.

Wir bezeichnen alle bisher betrachteten Wellenfunktionen im Impulsraum mit einem $+$ -Zeichen: $\dot{\varphi}(k^\mu)$, $\dot{\varphi}_A(k^\mu)$, $\dot{\varphi}_a(p^\mu)$. Außer ihnen soll es auch Wellenfunktionen $\bar{\varphi}(k^\mu)$, $\bar{\varphi}_A(k^\mu)$, $\bar{\varphi}_a(p^\mu)$ geben. Die $\bar{\varphi}$ genügen dann denselben Gleichungen wie die φ ; auch für die $\bar{\varphi}$ soll die Nebenbedingung $k^0 > 0$ bzw. $p^0 > 0$ gelten. Die beiden Sorten von Wellenfunktionen sollen sich nur durch ihr Transformationsverhalten unterscheiden. Wir verabreden, bei jeder Transformation der $\dot{\varphi}$ mit irgendwelchen Koeffizienten $c(k^\mu)$ bzw. $c(p^\mu)$ die $\bar{\varphi}$ mit den konjugiert-komplexen Koeffizienten $c^*(k^\mu)$ bzw. $c^*(p^\mu)$ zu transformieren. Die einzigen Transformationen

der $\dot{\varphi}$, die wir betrachtet haben, sind die FOURIER-Transformationen, die den Ortsraum definieren. In ihnen kommt der Exponent $i k^\mu x_\mu$ bzw. $i p^\mu x_\mu$ vor. Für die $\bar{\varphi}$ soll dieser Exponent also $-i k^\mu x_\mu$ bzw. $-i p^\mu x_\mu$ lauten. Im Ortsraum gibt es nun Wellenfunktionen $\dot{\psi}$, $\bar{\psi}$. Die $\bar{\psi}$ sind genau dieselben, die man gewonnen hätte, wenn man mit $+i k^\mu x_\mu$ bzw. $i p^\mu x_\mu$ transformiert, aber $-k^\mu$ bzw. $-p^\mu$ als den Wellenvektor bzw. Impuls definiert hätte. Da man natürlich üblicherweise die FOURIER-Transformation einheitlich für alle Lösungen mit demselben Exponenten ausführt, können wir umgekehrt sagen: Die $\bar{\psi}$ verhalten sich genau wie Wellenfunktionen mit negativer Frequenz k^0 bzw. p^0 . Die $\dot{\psi}$ und $\bar{\psi}$ sind gerade die Gesamtheit der Lösungen der Wellengleichung.

Der physikalische Sinn dieser Verdopplung ergibt sich aus der bekannten Deutung der jeweiligen Wellengleichung. Für die DIRAC-Gleichung ohne Wellenquantelung bedeutet p^μ den Energie-Impulsvektor und negatives p^0 negative Energie. Die Quantelung der Wellen bringt jedoch die Annahme der DIRACschen Löchertheorie zum Recht, nach der für negative p^0 vielmehr $-p^0$ die positive Energie eines Positrons ist. Unsere anfängliche Deutung von p^0 als Energie ist also genau dann aufrechtzuerhalten, wenn man, wie wir es getan haben, $p^0 > 0$ sowohl für $\dot{\varphi}$ wie für $\bar{\varphi}$ fordert.

Für spinlose-Bosonen, die der Gleichung

$$(\square - m^2) \psi = 0$$

genügen, läßt man ebenfalls negative p^0 zu. Dann bedeutet jedoch p^μ den Vektor des Ladungsstromes und die beiden möglichen Vorzeichen von p^0 bezeichnen direkt (ohne Löchertheorie) die beiden Ladungsvorzeichen. Auch dann wird p^0 gerade die Energie bedeuten, wenn man für $\bar{\varphi}$ das Vorzeichen von p^μ umkehrt.

Ausführlicher könnten wir die Verdopplungen der Zustandsräume nur im Zusammenhang der Spiegelgruppen der Physik diskutieren.

6. Verschwindende Ruhmasse, Spin 1: Maxwellscher Gleichungen

a) Erste Stufe:

Bezeichnen wir die irreduzible Darstellung der Gruppe unimodularer Transformationen der Zweierspinoren durch sich selbst (2 a. 3) mit D_2 und die zu ihr nicht-äquivalente irreduzible Darstellung durch

die hierzu konjugiert-komplexen Transformationen (3 a. 1) mit D_2^* , so ist die LORENTZ-Gruppe der k^μ das KRONECKER-Produkt $D_2 \times D_2^*$, das ebenfalls irreduzibel ist. Hingegen ist das KRONECKER-Produkt von D_2 mit sich selbst reduzibel: $D_2 \times D_2 = D_1 + D_3$. D_1 ist die identische Darstellung, die durch die Invariante $u^A v_A$ gegeben ist. Wir studieren jetzt Vektoren im Raum des anderen Summanden, den wir soeben als D_3 bezeichnet haben. Sie führen bei nochmaliger Quantelung zu Feldgrößen, die den MAXWELLSchen Gleichungen genügen. Auch diese Vektoren sind aus der Spinormathematik (vor allem durch CARTAN) wohlbekannt.

Wir definieren drei Funktionen eines Zweier-spinors u_A :

$$\begin{aligned} f_{12} &= i u_1 u_2, \\ f_{13} &= -\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2), \\ f_{23} &= -\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2). \end{aligned} \quad (6 \text{ a. } 1)$$

Vom Spin 1 wird man hier reden können, wenn man diese Funktionen als Beschreibungsweisen eines Zustandes ansieht, in dem zwei Spinoren u_A und v_A vorliegen, die durch die Bedingung $u_A = v_A$ aneinander gekoppelt sind. $u_A v_B = u_A u_B$ ist dann eine Produktwellenfunktion im Zustandsraum der doppelten Alternative von u und v , gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die erste Alternative im Sinne A und zugleich die zweite im Sinne B entschieden ist. Im Sinne unserer Deutung in Abschn. 3 beschreibt diese Wellenfunktion dann zwei Teilchen der Ruhmasse Null desselben Transformationstyps, die also, wenn sie wegen $u_A = v_A$ gleiche Impulsvektoren $p^\mu = k^\mu$ haben, wegen $l^\mu = 0$ auch gleiche Spinvektoren $s^\mu = k^\mu$ haben. Man wird also den Spin des Gesamtgebildes als die Summe der beiden Einzelspins auffassen. Doch handelt es sich nicht um zwei durch Wechselwirkung aneinander gebundene Teilchen (dazu müßten zwei Wellenfunktionen nächsthöherer Stufe miteinander multipliziert werden), sondern um ein durch zwei aneinander gekoppelte Alternativen definiertes Teilchen.

Bei unimodularen Transformationen der u_A transformieren sich die drei Größen f_{ik} wie die drei räumlichen Komponenten eines schiefssymmetrischen selbstdualen komplexen Tensors der LORENTZ-Gruppe. Daß der Tensor schiefssymmetrisch ist, heißt

$$f_{ik} = -f_{ki}. \quad (6 \text{ a. } 2)$$

Daß er selbstdual ist, heißt

$$f_{01} = i f_{23}, \quad f_{02} = i f_{31}, \quad f_{03} = i f_{12}. \quad (6 \text{ a. } 3)$$

Durch die Gln. (6 a. 1) bis (6 a. 3) ist der Tensor vollständig definiert. Einiges Rechnen, wobei man die WEYLSche Gleichung 1. Stufe benutzen kann, ergibt, daß der Tensor den „MAXWELLSchen Gleichungen 1. Stufe“

$$k_\lambda f_{\mu\nu} + k_\nu f_{\lambda\mu} + k_\mu f_{\nu\lambda} = 0 \quad (6 \text{ a. } 4)$$

$$k^\nu f_{\mu\nu} = 0 \quad (6 \text{ a. } 5)$$

genügt. Dabei ist k^μ der durch (2 a. 1) definierte „Impuls“. Diese Gleichungen sind wiederum algebraische Gleichungen zwischen einem Tensor $f_{\mu\nu}$ und einem Vektor k_λ , und nicht etwa Feldgleichungen.

b) Zweite Stufe:

Wir definieren wieder die Wellenfunktion im Impulsraum $\varphi(k^\mu)$ und bilden nun

$$\varphi_{\mu\nu}(k^2) = f_{\mu\nu} \varphi(k^2). \quad (6 \text{ b. } 1)$$

$\varphi_{\mu\nu}$ genügt Gleichungen, die formal genau wie Gln. (6 a. 4) und (6 a. 5) aussehen, nun aber Feldgleichungen im Impulsraum sind. Die FOURIER-Transformation

$$\psi_{\mu\nu}(x_\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi_{\mu\nu}(k^2) \exp(i k^\sigma x_\sigma) d^4k \quad (6 \text{ b. } 2)$$

führt zu komplexen Feldfunktionen im Ortsraum, die den Gln. (6 a. 4 und 5) unter Ersetzung von $i k^\mu$ durch $\partial/\partial x^\mu$ genügen. Dies sind nun bereits regelrechte MAXWELLSche Feldgleichungen. Denselben Gleichungen genügen die reellen Feldgrößen

$$F_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^*. \quad (6 \text{ b. } 3)$$

Wir identifizieren sie mit den Feldstärken des elektromagnetischen Feldes.

Die reellen Größen $F_{\mu\nu}$ enthalten genau ebensoviel Information wie die komplexen $\psi_{\mu\nu}$. Das liegt an der Bedingung der Selbstdualität (6 a. 3). Zum Beispiel sind ψ_{12} und ψ_{30} bis auf den Faktor i identisch, hingegen ist F_{12} , der Realteil von ψ_{12} und Imaginärteil von ψ_{30} , eine von F_{30} , dem Realteil von ψ_{30} und negativen Imaginärteil von ψ_{12} , unabhängige Größe.

Ebenso wie die WEYLSche Wellenfunktion ψ_A (und anders als die DIRACsche ψ_a) enthält $\psi_{\mu\nu}$, so wie es bisher definiert ist, nicht mehr Information als das skalare ψ , denn die Impulsrichtung fixiert ja die Spinrichtung mit. Das bedeutet hier, daß unser bisheriges $\psi_{\mu\nu}$ nur solche Felder beschreibt, die aus zirkular polarisierten ebenen Wellen einer festen Umlaufrichtung aufgebaut werden können. Wir weisen das durch eine kleine Rechnung nach. Wir be-

trachten einen Zustand fest gegebenem Fortschreitungsvektor k^μ und wählen seine Richtung als positive z -Richtung. Es folgt $u_2 = 0$. Wir setzen

$$u_1 = \sqrt{s} e^{i\vartheta/2}. \quad (6 \text{ b. } 4)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f_{12} &= 0, & f_{10} &= \frac{1}{2} s e^{i\vartheta}, \\ f_{13} &= -\frac{1}{2} s e^{i\vartheta}, & f_{20} &= \frac{i}{2} s e^{i\vartheta}, \\ f_{23} &= -\frac{i}{2} s e^{i\vartheta}, & f_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (6 \text{ b. } 5)$$

Nennen wir $k^0 = k$ und sinngemäß $x_3 = z$ und $x_0 = -t$, so folgt

$$\psi_{\mu\nu}(x_i) = f_{\mu\nu} e^{ik(z-t)} \quad (6 \text{ b. } 6)$$

sowie

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= (f_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^*) \cos k(z-t) \\ &+ i(f_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}^*) \sin k(z-t). \end{aligned} \quad (6 \text{ b. } 7)$$

Die Ausrechnung ergibt, wenn wir F_{ik} mit E_i und F_{0k} mit H_k bezeichnen

$$\begin{aligned} E_x &= \cos[k(z-t) + \vartheta], & H_x &= \sin[k(z-t) + \vartheta], \\ E_y &= -\sin[k(z-t) + \vartheta], & H_y &= \cos[k(z-t) + \vartheta], \\ E_z &= 0, & H_z &= 0. \end{aligned} \quad (6 \text{ b. } 8)$$

Dies ist rechtsdrehendes zirkular polarisiertes Licht.

Die entgegengesetzte Polarisationsrichtung ergibt sich, wenn der Ausdruck $k(z-t)$ mit dem Faktor -1 versehen wird. Dies wird normalerweise durch ein negatives k bewerkstelligt, das ebenfalls eine Lösung der MAXWELL-Gleichungen ergibt. In unserem Sinne der Verdopplung des Zustandsraumes hat man statt dessen den Faktor -1 der Klammer $(z-t)$ zuzuschreiben. Jedenfalls erreicht man so eine Basis, nach der man alle bekannten elektromagnetischen Felder im Vakuum entwickeln kann. Die einfache Alternative, ob das Lichts rechts- oder linkszirkular polarisiert ist, ist eine Basis des dreidimensionalen reellen Raums der möglichen Polarisationsweisen (II, 3 c).

7. Statistische Deutung

Bisher haben wir die statistische Deutung beiseitegelassen. Wir haben demgemäß die Zustandsvektoren nicht normiert und haben nur von den linearen Eigenschaften des Zustandsraumes Gebrauch gemacht. Wir behaupten nun – mit alsbald zu besprechenden Qualifizierungen –, daß die $(n+1)$ -te Quantelungsstufe jeweils die statistische Deutung der n -ten Stufe rechtfertigt, und zwar primär als Häufigkeitsdeutung.

Sei ψ der Zustandsvektor n -ter Stufe. Sofern die $(n+1)$ -te Stufe, welche ψ zu einem Operator macht, zu dem Ergebnis führt, daß $N = \psi^* \psi$ die nicht-negativen ganzen Zahlen zu Eigenwerten hat, kann man diese Zahlen als Häufigkeiten deuten, mit denen der durch ψ beschriebene Zustand realisiert ist. Diese Tatsache ist aus der Feldquantisierung wohlbekannt; wir fassen sie als die allgemeine Grundlage der statistischen Deutung der Quantentheorie in jeder Stufe auf.

Gehen wir ins Einzelne, so müssen wir auf eine quantentheoretische Beschreibung des Meßprozesses (vgl. SÜSSMANN⁸) verzichten, da unsere Theorie die Wechselwirkung noch nicht enthält. Wir können aber, wie man es bei der Einführung der Quantenmechanik tat, axiomatisch fordern, was ein außerhalb des Systems gedachter Meßapparat registrieren würde.

Wir betrachten zunächst den einzelnen Quantelungsschritt. In der üblichen statistischen Deutung unterscheiden wir drei begrifflich getrennte Annahmen oder Axiome:

1. *Axiom der Meßbarkeit*: Ist ein Zustand Eigenzustand eines hermiteschen Operators, so liefert eine Messung der dem Operator zugeordneten Observablen den diesem Zustand zukommenden Eigenwert des Operators als Meßwert.

In dieser Formulierung erscheint die Observable als das, was gemessen wird. Die Meßwerte eines vollständigen Satzes vertauschbarer Operatoren definieren aber auch den Zustand (bis auf eine Phase) eindeutig. Das Axiom impliziert insofern auch die eindeutige Feststellbarkeit eines Zustandes. Ist der Zustand eindeutig bekannt, so kennt man damit die Eigenwerte aller der Operatoren, deren Eigenzustand er ist, durch bloße Rechnung; es ist dann gleichgültig, welchen von ihnen man zur Charakterisierung des Meßergebnisses wählt. Den Kern des Axioms der Meßbarkeit kann man also auch ansprechen als

1a. *Axiom der Feststellbarkeit*: Es ist möglich, durch Messung eindeutig festzulegen, daß ein bestimmter Zustand vorliegt.

Daß dies nicht trivial ist, lehrt das

2. *Axiom der Möglichkeit*: Liegt ein Zustand φ vor, so ist es im allgemeinen möglich, bei einer Messung einen von ihm verschiedenen Zustand ψ vorzufinden.

Der Grad der „Koexistenz“ zweier Zustände wird bestimmt durch das

⁸ G. SÜSSMANN, Bayr. Akad. Wiss. Math.-Naturw. Klasse, Heft 88 (1958).

3. *Axiom der Wahrscheinlichkeit*: Die Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand φ durch Messung einen Zustand ψ vorzufinden, ist das Absolutquadrat des inneren Produkts $|\langle\varphi, \psi\rangle|^2$.

Dabei ist eine unitäre Metrik definiert durch

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \sum_k \varphi_k^* \psi_k \quad (7.1)$$

und die Vektoren sind normiert

$$\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle\psi, \psi\rangle = 1. \quad (7.2)$$

Für einen Operator H ist dann der statistische Erwartungswert

$$\text{Erw}(H) = \langle H\psi, \psi\rangle = \sum \psi_k^* H_{kl} \psi_l. \quad (7.3)$$

Gewöhnlich setzt man das Axiom der Wahrscheinlichkeit voran, welches das Axiom der Möglichkeit impliziert; man braucht dann im wesentlichen die Axiome 1 und 3. Wir wollen die Vermutung begründen, daß in einer streng durchgeführten Theorie der mehrfachen Quantelung die Axiome 1 oder 1a und 2, um eine wesentlich schwächere Annahme als 3. ergänzt, ausreichen würden.

Wir gehen dazu zur nächsten Quantelungsstufe über. ψ sei ein Zustand n -ter Stufe. Der Index k von ψ_k beziehe sich auf irgendeine Basis im ψ -Raum, also eine (endliche oder unendliche) Alternative $(n-1)$ -ter Stufe. Wir quanteln ψ nach den Vorschriften für die BOSE-Statistik:

$$\begin{aligned} \psi_k \psi_l^* - \psi_l^* \psi_k &= \delta_{kl}, \\ \psi_k \psi_l - \psi_l \psi_k &= 0, \\ \psi_k^* \psi_l^* - \psi_l^* \psi_k^* &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Dann haben die Operatoren

$$N_k = \psi_k^* \psi_k \quad (7.5)$$

als Eigenwerte die „Besetzungszahlen“

$$N_k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Der bisherige Ausdruck für den Erwartungswert des Operators n -ter Stufe H , also $\langle H\psi, \psi\rangle$, ist nun, in der $(n+1)$ -ten Stufe selbst ein Operator und hat im allgemeinen überhaupt keinen Zahlwert.

Es gibt aber gewisse Zustände $(n+1)$ -ter Stufe, in denen man $\langle H\psi, \psi\rangle$ genähert einen Zahlwert zu schreiben kann. Wir wählen sie, ohne den Charakter der verwendeten Näherung genau zu untersuchen, durch die beiden Forderungen aus:

1. Alle N_k sollen diagonal sein.
2. Einige N_k sollen groß gegen Eins sein und der Beitrag aller anderen N_k soll vernachlässigbar sein.

In jedem der so ausgewählten Zustände sind die N_k Zahlen. Man kann in diesen Zuständen auch die ψ_k durch Zahlen beschreiben. Für diejenigen ψ_k , deren $N_k \gg 1$ ist, sind die beiden Glieder der linken Seiten von (7.4) ebenfalls $\gg 1$, also ψ_k und ψ_k^* nahezu vertauschbar; wir schreiben

$$\psi_k = \sqrt{N_k} \exp(i\theta_k). \quad (7.7)$$

Die ψ_k , deren N_k nicht $\gg 1$ ist, setzen wir gleich Null. Wir nennen ferner

$$N = \sum N_k \quad (7.8)$$

die Gesamtbesetzungszahl. Dann erhält auch $\langle H\psi, \psi\rangle$ einen Zahlwert, und zwar ist

$$\langle H\psi, \psi\rangle_{(n+1)} = N \langle H\psi, \psi\rangle_{(n)}. \quad (7.9)$$

Die Indizes $n+1$ und n numerieren hier die Stufen. $\langle H\psi, \psi\rangle_n$ ist mit auf Eins normiertem ψ nach Gl. (7.2) gebildet, während in der $(n+1)$ -ten Stufe für die ausgewählten Zustände gilt

$$\langle\psi, \psi\rangle = N. \quad (7.10)$$

Wir deuten diese Formeln wie folgt: Ein „ausgewählter“ Zustand 2. Stufe bezeichnet eine endliche reale Gesamtheit von N gleichen Zuständen 1. Stufe, deren jeder durch den Zustandsvektor ψ_k beschrieben ist. In dieser Gesamtheit ist die Anzahl von Fällen, in denen der Zustand $(n-1)$ -ter Stufe k vorkommt, N_k , die relative Anzahl dieser Fälle also

$$w_k = N_k/N. \quad (7.11)$$

N_k ist aber nicht etwa eine scharf fixierte Anzahl von Fällen, denn wir haben bei der Definition der ausgewählten Zustände 1 gegen N_k vernachlässigt. Besitzt man schon eine statistische Deutung der $(n+1)$ -ten Stufe, so kann man N_k als Erwartungswert des zugehörigen Operators auffassen, und daraus folgt dann die Deutung von w_k als Wahrscheinlichkeit bzw. von $\langle H\psi, \psi\rangle_n$ als Erwartungswert. Das heißt, die statistische Deutung der $(n+1)$ -ten Stufe rechtfertigt die statistische Deutung der n -ten Stufe. Das ψ der n -ten Stufe ist der klassische Grenzfall des Operators ψ der $(n+1)$ -ten Stufe und müßte in diesem Sinne auf eine sehr große Zahl N normiert werden; die Normierung auf 1 entspricht dem Übergang von Häufigkeits- zu Wahrscheinlichkeitsbegriffen.

Soweit haben wir die Konsistenz der statistischen Deutung bei mehrfacher Quantelung gezeigt. Wir möchten vermuten, daß eben diese Überlegung, weiter fortgeführt, gestatten wird, das Axiom 3. durch

eine schwächere Forderung (etwa die der Gleichwahrscheinlichkeit gewisser Zustände) zu ersetzen. Wir verfolgen dies nicht, fügen aber noch einige Bemerkungen an.

ψ erscheint in unserem Bild als Beschreibung einer *realen* Gesamtheit vieler gleichartiger Zustände (etwa vieler Teilchen desselben Zustandes in einem „Topf“). Meist formuliert man statt dessen die statistische Deutung bezüglich *idealer* (GIBBSscher) Gesamtheiten; man betrachtet etwa die häufige Wiederholung derselben Messung an getrennten Gebilden, die jedoch im selben Zustand sind. Daß beide Arten von Gesamtheiten dieselben Resultate liefern, ist eine zusätzliche statistische Behauptung, die wir nicht begründet haben.

Setzt man sie voraus, so kommt unsere Auffassung der von BLOCHINZEW⁹ sehr nahe, nach der die ψ -Funktion nie einen Einzelfall, sondern stets ein Kollektiv beschreibt. Natürlich folgen wir damit nicht seiner Meinung, die Quantenmechanik sei nichts weiter als eine deterministische, objektivierende Theorie von Kollektiven. Selbst wenn sie das wäre, so wäre sie ja jedenfalls damit noch nicht eine deterministische, objektivierende Theorie der Wirklichkeit, denn in der Wirklichkeit gibt es den Einzelfall, und dieser ist feststellbar, aber durch die Quantentheorie nicht kausal determiniert. Unsere Fassung der Quantentheorie beschreibt jedoch darüber hinaus auch den Einzelfall, natürlich ebenfalls ohne ihn kausal zu determinieren. Zum Beispiel ist es in unserer $(n+1)$ -ten Stufe ein möglicher Zustand, daß ein bestimmtes $N_{k'}=1$ und alle anderen $N_k=0$ sind. Nur ist dies kein „ausgewählter“ Zustand, d. h. ψ_k hat in ihm gar keinen durch c -Zahlen beschreibbaren Funktionsverlauf. Mit anderen Worten: ψ -Funktionen beschreiben in der Tat nur Kollektive; eben darum haben Zustände, wenn man sie so genau kennt, daß sie nicht als Kollektive aufgefaßt werden können, keine definierte ψ -Funktion. ψ_k ist für kleine Teilchenzahlen sinnlos, nicht aber N_k . Man kann nun freilich die Zustandsfunktion $(n+1)$ -ter Stufe $\omega(N_k)$ einführen. Sie wird in unserem Fall, wenn sie auf 1 normiert ist, die Gestalt

$$\omega(N_k) = \delta_{kk'} \quad (7.12)$$

haben. So verstanden, beschreibt ω ein Kollektiv der von uns soeben betrachteten Einzelfälle. Aber dieses ω ist ja nur klassischer Grenzfall der $(n+1)$ -ten

Stufe. Auch der Operator $N_{n+2} = \omega^* \omega$ wird hingegen in unserem Einzelfall genau den Wert 1 an der Stelle $k=k'$ haben. Alle möglichen Einzelfälle kommen demnach unter unseren Zuständen vor, ja ein scharf definierter Zustand ist stets als „Einzelfall“ anzusehen. Der statistische Charakter der Theorie gründet in der Art der Beziehung der Zustände zueinander.

Noch eine mathematische Bemerkung: Die Auszeichnung der unitären Metrik (7.1) bzw. der (7.1) invariant lassenden unitären Transformationen geht nach unserer Auffassung auf die unitär invariante Vertauschungsrelationen (7.4) zurück. Einen anderen Grund hat die pseudoeuklidische Metrik der LORENTZ-Gruppe; die Invarianz von $k^\mu k_\mu$ ist in der redundanten reell-vierdimensionalen Schreibweise der Ausdruck der affinen Invarianz von $u^A u_A$. Wir möchten dies als die genaueste heute mögliche Antwort auf die HELMHOLTZ-WEYLSche Frage nach dem Grund der Pythagoräischen Metrik des physikalischen Raumes auffassen¹⁰.

Die Überlegungen des vorliegenden Abschnitts haben von der speziellen Gestalt (7.4) der Vertauschungsrelationen wesentlich Gebrauch gemacht.

Über andere Vertauschungsrelationen vgl. Abschnitt 9.

8. Die Beziehung unserer Formeln zu anderen einfachen Alternativen

In II wurden vier Beispiele ganz verschiedener physikalischer Deutungen der einstufigen Quantentheorie der einfachen Alternative gegeben. In der vorliegenden Arbeit haben wir eine fünfte Deutung gewählt. Wenn unsere Theorie allgemeingültig ist, müssen unsere Formeln auch in den anderen Beispielen einen Sinn haben. Zum Teil sind jene anderen Alternativen in unserem Aufbau und der Deutung, die wir ihm gegeben haben, schon aufgetreten (Spin des Elektrons, Polarisation des Lichtes). Dann müßte also der Zustandsraum jener anderen Alternativen ein Unterraum unseres Zustandsraumes sein. Wenn dieser Unterraum bei mehrfacher Quantelung durch dieselben Formeln beschrieben wird wie der ganze Raum, so müßte demnach der ganze Raum gewissen seiner Unterräume isomorph sein. Das ist bei einem unendlichdimensionalen Raum sehr wohl möglich.

⁹ D. J. BLOCHINZEW, Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1953.

¹⁰ Vgl. C. F. v. WEIZSÄCKER, Z. Naturforschg. 7 a, 141 [1952]. D. LAUGWITZ, Z. Naturforschg. 9 a, 827 [1954].

a) Elektronenspin

Ein Elektron, dessen Spin im STERN–GERLACH-Versuch gemessen wird, hat unrelativistische Geschwindigkeit. Das bedeutet $p^m \approx 0$, $k^m \approx l^m$, $u_A \approx v^{A*}$. Der erste Spinor u_A bestimmt in dieser Näherung den zweiten v^{A*} mit. Die verbleibende Alternative, die der Index A von u_A andeutet, ist genau die Spinalternative, wie sie in II, 3a beschrieben wurde. Man gelangt von unserer Darstellung der α -Matrizen zur ursprünglichen DIRACschen durch die Transformation auf neue Zweierspinoren s, t :

$$s_A = u_A + v^{A*}, \quad t_A = v^{A*} - u_A. \quad (8 \text{ a. } 1)$$

b) Isotopenspin

Der Isotopenspin ist eine zweiwertige Variable, von der die Wellenfunktion abhängt. Wir nennen die zweiwertige Variable, die die Impulsalternative zum Ausdruck bringt, eine Größe nullter Stufe, der dann der Impulsvektor k^μ als Größe erster Stufe entspricht. Der Isotopenspin tritt neben k^μ bzw. x_μ als Argument der Wellenfunktion auf, ist also eine Größe erster Stufe. (In derselben Weise erscheint übrigens, wegen der in 5b genannten Inkonsistenz der Quantelungsmethode, die zur DIRAC-Gleichung führt, auch der Elektronenspin in der DIRACschen Theorie als Größe erster Stufe.) Da der Isotopenspin in unserer Theorie bisher nicht aufgetreten ist, versuchen wir ihn hier nicht näher zu diskutieren.

c) Polarisation des Lichtes

Auch die Alternative, ob Licht rechts- oder linkszirkular polarisiert sei, definiert als zweiwertige Variable eine Größe erster Stufe. Sie ist in üblicher Sprechweise die Entscheidung, ob k^0 positiv oder negativ ist. Normieren wir die MAXWELLSchen komplexen Wellenfunktionen $\psi_{\mu\nu}$ der ebenen Wellen in geeigneter Weise und unterscheiden wir ihre Zugehörigkeit zu positivem oder negativem k^0 durch einen oberen Index $+$ oder $-$, so können wir die allgemeinste ebene Welle zu festem \mathbf{k} schreiben:

$$\psi_{\mu\nu} = u_+ \psi_{\mu\nu}^+ + u_- \psi_{\mu\nu}^- \quad (8 \text{ c. } 1)$$

Der „Spinor“ (u_+, u_-) ist der quantentheoretische Zustandsvektor der Polarisationsalternative. Die Bedeutung des ihm zugeordneten reellen Vektors, den wir k_p^μ nennen wollen, ist in II. 3c beschrieben. u und k_p^μ sind Größen zweiter Stufe. Für u betrachten wir daher nur unitäre Transformationen (vgl. dazu Abschnitt 7 und 9); daher treten nur Drehungen im

k_p^μ -Raum, aber keine „LORENTZ-Transformationen“ in diesem Raum auf.

Die Quantelung von k_p^μ führt zu einer Wellenfunktion dritter Stufe, also einem Teilraum des Zustandsraumes der Quantenfeldtheorie. Hierbei erhalten, da man nach BOSE quantelt, gewisse reelle Größen zweiter Stufe ganzzahlige Eigenwerte. Zu ihnen gehören

$$\begin{aligned} n_+ &= \frac{1}{2}(k_p^0 + k_p^3), \\ n_- &= \frac{1}{2}(k_p^0 - k_p^3). \end{aligned} \quad (8 \text{ c. } 2)$$

Sie sind die Besetzungszahlen der Polarisationszustände $+$ und $-$. Die k_p^μ sind nun nicht-vertauschbare Operatoren, deren Theorie wir im Abschnitt 9 besprechen werden. Eine zu (2b.1) analoge Gleichung läßt sich bilden, und man kann einen Vektor $x_{p\mu}$ durch eine zu (2b.2) analoge Transformation definieren. $x_{p\mu}$ hat natürlich nichts mit dem Ortsvektor zu tun. Wir studieren die Bedeutung dieser Größen hier nicht.

d) YOUNGSCHE Versuch

Der in II (3d.5) definierte Spinor u_1, u_2 ist ebenfalls eine Größe zweiter Stufe. Die Bedeutung seines Vektors k^μ ist in II erörtert. Weiterquanteln führt auch hier in die Quantentheorie der Wellen. $\frac{1}{2}(k^0 + k^3)$ und $\frac{1}{2}(k^0 - k^3)$ sind dann die Anzahlen von Teilchen, die durch die beiden Löcher gehen.

9. Offene Fragen

a) Konsequente Quantelung

Wir kennen jetzt drei verschiedene Definitionen des Quantelungsschritts: Die „naive“, welche den Antworten einer gegebenen klassischen Alternative komplexe Zahlen zuordnet, die zur BOSE-Statistik führende nach (7.4) und die zur FERMI-Statistik führende, die in (7.4) die $-$ -Zeichen durch $+$ -Zeichen ersetzt. In der ersten und zweiten Stufe haben wir naiv gequantelt, die dritte Stufe verlangt sicher eine der beiden anderen Methoden. Die statistische Deutung haben wir nur aus der BOSE-Quantelung erhalten; die FERMI-Quantelung liefert keine großen und die naive Quantelung keine ganzzahligen Werte für N_k . Die Zustandsraumverdopplung ist in mehreren Stufen aufgetreten.

All dies legt den Gedanken nahe, es sollte eigentlich nur eine einheitliche Quantelungsvorschrift geben. Es ist bekannt, daß man die BOSE-Quantelung auf die FERMI-Quantelung zurückführen (Bosonen

aus Fermionen zusammensetzen) kann. Die naive Quantelung unserer 2. Stufe wiederum kann als Grenzfall der BOSE-Quantelung für große N verstanden werden.

Um letzteres zu zeigen, wenden wir die Vertauschungsrelationen (7.4) auf den Spinor der Grundalternative an. Rechnen wir daraus die Vertauschungsrelationen der k^μ aus, so ergibt sich

$$k^1 k^2 - k^2 k^1 = 2 i k^3$$

und zyklisch, sowie (9 a. 1)

$$k^m k^0 - k^0 k^m = 0 \quad (m = 1, 2, 3).$$

Im verdoppelten Zustandsraum folgen aus analogen Vertauschungsrelationen für den Viererspinor auch für p^μ und s^μ die Vertauschungsrelationen (9 a. 1). Diese sind aber bis auf einen Faktor 2, der durch Umnormierung auf $k^\mu/\sqrt{2}$ fortfällt, die Vertauschungsrelationen des Drehimpulses. Wenn unsere Quantelungsvorschrift richtig ist, müßten also die Impulskomponenten unvertauschbar sein und ganzzahlige Eigenwerte haben.

Für den gequantelten Impuls hat die Angabe eines Zahlenquadrupels k^μ keinen Sinn, daher auch nicht die Schreibweise der Wellenfunktion $\varphi(k^\mu)$. Folglich kann man auch nicht durch eine FOURIER-Transformation der $\varphi(k^\mu)$ einen Ortsvektor x_μ definieren. Indem wir die genauere Theorie einer späteren Arbeit vorbehalten, können wir aus der Analogie zum Drehimpuls einige qualitative Folgerungen ziehen. Der ungequantelte Impuls ist der infinitesimale Translationsoperator im euklidischen Ortsraum. Die Drehimpulskomponenten können als infinitesimale Translationsoperatoren im dreidimensionalen sphärischen Raum der Drehwinkel (EULERSche Winkel) dargestellt werden. Zu unseren gequantelten Impulsen gehört demnach ein sphärischer Ortsraum.

Diese Theorie hat also eine Art spiegelbildlicher Analogie zur Theorie von SNYDER¹¹, der den Ort quantelte und einen gekrümmten Impulsraum erhielt. SNYDERS Theorie ist unter anderem daran stecken geblieben, daß er die Translationen im Ortsraum (den inhomogenen Teil der LORENTZ-Gruppe) nicht darstellen konnte. Mathematisch gesprochen scheinen Vertauschungsrelationen seiner oder unserer Art nur für Vektorkomponenten, aber nicht für Punktkoordinaten brauchbar zu sein. Wir geraten in diese Schwierigkeit nicht, da wir den Impulsvektor quanteln.

Die BOSE-Quantelung der Spinoren und demgemäß die Relationen (9 a. 1) sind nicht LORENTZ-invariant, sondern nur drehinvariant im k -Raum. Demgemäß zeichnet ein sphärischer Raum zwar keine Richtung, aber eine Ruhe aus. Unser Ansatz ist also mit der Erfahrung nur vereinbar, wenn das Impulsquantum und damit die Raumkrümmung sehr klein ist, vielleicht so klein, daß die Raumkrümmung erst in kosmologischen Dimensionen merkbar wird. Die LORENTZ-Gruppe wäre dann nur im Kleinen anwendbar. In der Tat werden für große Impulse die rechten Seiten der Vertauschungsrelationen gleich Null, und in diesem Grenzfall ist die Theorie dann unimodular bzw. LORENTZ-invariant.

Die naive Quantelung der 1. Stufe können wir hingegen auch als eine FERMI-Quantelung auffassen. Geben wir die einfache Alternative schon vor, so ist die Quantelung naiv. Statt dessen können wir von einem eindimensionalen Zustandsvektor nullter Stufe ausgehen, der also „quantenlogisch“ als Bewertung einer isolierten Aussage gelten kann und den wir τ nennen wollen. Fordern wir dann in der 1. Stufe die Vertauschungsrelation

$$\tau \tau^* + \tau^* \tau = 1 \quad (9 \text{ a. } 2)$$

$$\text{so folgt} \quad A - 1 = \tau^* \tau = \begin{cases} 0 \\ 1; \end{cases} \quad (9 \text{ a. } 3)$$

dabei ist A genau unser Spinorindex, der der zwei Werte 1 und 2 fähig ist.

Schließlich kann man versuchen, alle BOSE-Quantelungen aus FERMI-Quantelungen herzuleiten. So nimmt HEISENBERG an, daß es in der Quantentheorie der Felder nur ein „Urfeld“ gibt, und daß dieses Fermionen entspricht. Für die Komponenten unseres Grundspinors u_A kann man jedoch nicht einfach $+$ -Vertauschungsrelationen fordern, denn dann hätten die k^μ nur noch die Eigenwerte 0, ± 1 , ± 2 . Die unendlich vielen Eigenwerte eines BOSE- N_k ergeben sich beim Aufbau aus einem FERMI-Feld, indem immer unendlich viele Freiheitsgrade der Fermionen zu einem Freiheitsgrad von Bosonen zusammengefaßt werden; solche Freiheitsgrade sind in der Grundalternative aber noch nicht gegeben. Doch ist es möglich, durch mehrfach iterierte FERMI-Quantelung einen der BOSE-Quantelung sehr ähnlichen Formalismus zu entwickeln. Auch die Verdopplung der Zustandsräume läßt sich wohl unter den Begriff der iterierten FERMI-Quantelung fassen. Auch hierüber soll in einer späteren Arbeit ausführlicher berichtet werden.

¹¹ M.S. SNYDER, Quantized Space-Time, Phys. Rev. **71**, 38 [1947].

b) Wechselwirkung

Bisher haben wir nur kräftefreie Teilchen behandelt. Das steckt schon in der Deutung der Grundalternative. Wenn p der Impuls eines Teilchens zu jeder Zeit ist, so kann dieses Teilchen keinen Kräften unterliegen. Dementsprechend haben wir (ohne es ausdrücklich zu sagen) die abgeleiteten Wellengleichungen, die alle linear sind, für die dritte Stufe als Operator-Gleichungen im HEISENBERG-Bild aufgefaßt. Nun haben wir aber an vielen Beispielen gesehen, auf wieviele verschiedene physikalische Situationen dieselben quantentheoretischen Formeln passen. Wir haben mathematischen Grund zu der Vermutung, daß unsere Formeln bei anderer Deutung auch die Theorie der Wechselwirkung beschreiben könnten. Unser Formalismus führt ja zu einem HILBERT-Raum. Auch die Theorie der Wechselwirkung verwendet einen HILBERT-Raum. Aber alle HILBERT-Räume sind isomorph; im abstrakten Sinne gibt es nur *einen* HILBERT-Raum. Also müßte es eine Transformation geben, die unsere Theorie in die der Wechselwirkung überführt. (Eine indefinite Metrik des HILBERT-Raumes würde, wenn sie in beiden Theorien aufträte, am Argument nichts ändern.)

Für eine Theorie mit bekannter Wechselwirkung

kann man (sofern die Feldtheorie als widerspruchsfrei gelten darf) die Transformation angeben. Im „Wechselwirkungsbild“ (TOMONAGA, SCHWINGER) sind die Wellengleichungen zwischen den Operatoren linear. Wir müßten also unsere Darstellung der Theorie als das Wechselwirkungsbild auffassen und die gesuchte Transformation als die ins HEISENBERG-Bild. Demnach entscheidet erst die Art, wie die dritte Quantelung ausgeführt wird, über die physikalische Bedeutung der Größen der früheren Stufen.

Führt man mehrere Felder ein, die miteinander wechselwirken, so muß man in unserer Theorie auch mehrere Grundalternativen einführen, die trotzdem zum selben Ortsraum in Beziehung gesetzt werden. Das erscheint künstlich. Es würde näherliegen, von *einer* Grundalternative ausgehend *ein* „Urfeld“ im Sinne der neueren Arbeiten HEISENBERGS aufzubauen, dessen Wechselwirkung mit sich selbst alle bekannten Felder hervorbringen müßte. Die Ähnlichkeit unserer Gl. (4.24) mit der Grundgleichung von HEISENBERG und PAULI legt diese Hoffnung nahe. Wir können aber bisher keine Deutung der Grundalternative angeben, die (4.24) als gleichbedeutend mit der HEISENBERG–PAULISCHEN Gleichung aufzufassen gestattete.